DE QUANTITATE FLUENTE TRACTATUS,

IN QUO EXPLICANTUR

FUNDAMENTA CALCULI DIFFERENTIALIS NONNISI EX NOTIONE FLUENTIS DEDUCTA.

ACCEDIT

THEOREMATIS INFINITINOMIALIS INDETERMINATI EXPONENTIS, SINE PONENDO THEOREMATE BINOMIALI DEMONSTRATIO UNIVERSALIS.

AUCTORE

FRIDERICO GUILIELMO SPEHR.

CUM TABULA AENEA.

BRUNSVIGAE, 1823.

SUMTIBUS FRIDERICI VIEWEGII.

PROOEMIUM.

Notio facultatis mutandi alicujus fluentis jam in scriptis NEWTONI versatur. Attamen id, quod haec notio gravissima non solum post somnum longum denuo in lucem protraheretur, sed etiam ad notionem universalem amplificaretur, recentiori aetati debemus.

Notiones variabilitatis et facultatis mutandi sunt singulares, in quibus systema cum scientiae nomine conveniens calculi differentialis nititur, atque de iis in hac commentatione tractabo, quam autem nonnisi tenue tentamentum exhibeo, optoque, eam in eoque sensu legi.

Brunsvigae, V. id. Dec. A. MDCCCXXII.

Introductio.

Transitum in calculum differentialem antea non solum perdifficilem sed etiam cum nomine scientiae non convenientem fuisse, satis notum est.

Cujus autem causa in defectu versabatur cujusdam scientiae.

Diu jamjam Mathesin elementarem generaliter tractaverant veteres Geometrae, quam modo tenua videantur vestigia scientiae quantitatum complexarum sive Arithmeticae generalis. Primum, quum Hindenburg, Geometra celeberrimus, ideam artis combinatoriae generaliter tractandae conciperet, procedere potebat, quod Analysis ad scientiam produceretur;

sicque impedimenta, quae viam ad gravissimam partem totius Matheseos obsepiebant, tollebantur, h. e. notio quam maxime paradoxa infinite parvi ex calculo differentiali exterminabatur.

Attamen hic calculus differentialis nonnisi doctrina erat functionum in formali sensu acceptarum, atque, quamvis de quantitate variabili tractabat, veram notionem variabilitatis neglexit.

Itaque sententiae exstiterunt, illam expositionem, quamvis in explicatione formarum arithmeticarum fundamentalium nihil in se haberet, quod reprehendi possit, nihilominus in applicationibus ad quantitates reales cum vulgari eandem esse.

Attamen hae applicationes singulares sunt objectus veri calculi differentialis, si igitur hic notiones ad irritum cadunt, omnino exterminandae sunt.

Geometrae autem recentiores, quamvis Analysin a tenui scientiola, quam Algebram vocabant, ad immensum campum gravissimi contemplationis transmutabant, nihilominus eam adhuc non satis amplificaverunt.

Illae deductiones formales ipsae, quae in vulgari expositione calculi differentialis maximam obtinent partem, nonnisi ad Analysin spectant; vere calculus differentialis eas supponit.

Arithmetica generalis est scientia formarum complexarum, quas secundum potentias unius vel plurium quantitatum primariarum progredientes contemplatur. Notio autem variabilitatis ei aliena est atque quantitas primaria est signum sine vera significatione, i. e. signum formale. De functione definitionem dat: *expressionem esse analyticam ex quantitatibus primariis et aliis non primariis quomodocunque compositam;* et haec definitio etiam est formalis.

In capite ultimo denique: *de calculo differentiarum*, in functionem aliquam ips. x pro x valorem $x + \Delta x$ substituens *), atque terminum primum seriei, ex ea substitutione ortae, functione ipsa subtracta, *differentiale* appellans, theorema taylorianum deducit. Sic igitur etiam differentiale formaliter definit.

Attamen hae deductiones formales sunt

*) Ubi autem Δ x non incrementum est sed nonnisi substitutio.

illae, quas in regionem calculi differentialis trahere solent, quae autem illi alienae sunt.

In Analysi igitur primum quantitas primaria, tum functio differentiale denique habet significationem formalem. Calculus autem differentialis verus cum significatione vera seu materiali harum quantitatum trium initium capit.

Eo, quod illas notiones tres materiali sensu acceptas h. e. notiones *veri inventoris* calculi differentialis non sequerentur Geometrae, in obscuriores obscurioresque sententias de eo calculo lapsi sunt.

Quomodo autem theorema taylorianum in differentiarum calculo sine in auxilium vocandas notiones variabilitatis demonstrandum, ostendendi, hic locus sit.

Data aliqua functione primariae x, si gradatim pro x valores substituuntur:

$x+\Delta x,\ x+2\Delta x,\ x+3\Delta x, \ldots\ x+n\Delta x, \ldots$

generaliter series exsistit, quarum termini per

$$\overset{0}{y},\ \overset{1}{y},\ \overset{2}{y} \ldots \overset{n}{y} \ldots$$

indicentur, ita, ut generaliter:

$$\overset{n}{y} = \varphi(x+n\Delta x) \text{ est.}$$

Valores subtractione omnis termini a sequente orientes, seriem primarum indifferentiarum faciunt, quae per:

$$\overset{0}{\Delta}{}^1 y,\ \overset{1}{\Delta}{}^1 y,\ \overset{2}{\Delta}{}^1 y\ \ldots\ \overset{n}{\Delta}{}^1 y\ \ldots$$

indicetur. Eodem modo series differentiarum sequentes exsistunt, quarum generaliter k^{ta} per:

$$\overset{0}{\Delta}{}^k y,\ \overset{1}{\Delta}{}^k y,\ \overset{2}{\Delta}{}^k y,\ \ldots\ \overset{n}{\Delta}\, y,\ \ldots$$

indicetur.

Regula ergo data ad formationem cujusque termini alicujus seriei differentiarum est:

$$\overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n+1}{\Delta}{}^{k-1} y - \overset{n}{\Delta}{}^{k-1} y$$

pro $k = 1$ adest:

$$\overset{n}{\Delta}{}^1 y = \overset{n+1}{\Delta}{}^0 y - \overset{n}{\Delta}{}^0 y = \overset{n+1}{y} - \overset{n}{y}$$

exoritur ergo $\overset{n}{\Delta}{}^1 y$, si in $\overset{n}{y}$ pro x valor $x + \Delta x$ substituitur subtracto $\overset{n}{y}$ ipso. Cum autem $\overset{n+2}{y} - \overset{n+1}{y}$ ex $\overset{n+1}{y} - \overset{n}{y}$ ita exsistit, ut pro x valor $x + \Delta x$ in $\overset{n+1}{y} - \overset{n}{y}$ substituitur, exoritur eodem modo $\overset{n+1}{\Delta}{}^1 y$ ex $\overset{n}{\Delta}{}^1 y$. Cum autem series secundarum differentiarum tanquam series primarum differentiarum seriei primarum differentiarum considerari possit, sequitur, $\overset{n+1}{\Delta}{}^2$ ex $\overset{n}{\Delta}{}^2$ eodem modo exsistere, atque generaliter $\overset{n+1}{\Delta}{}^k y$ ex $\Delta^k y$ ori-ri, si in $\overset{n}{\Delta}{}^k y$ pro x, $x + \Delta x$ substituitur. Cum autem est, $\overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n+1}{\Delta}{}^{k-1} y - \overset{n}{\Delta}{}^{k-1} y$, sequitur: quondam terminum alicujus seriei differentiarum exsistere, si in aeque altum terminum seriei differentiarum antecedentis pro x, valor $x + \Delta x$ substituitur et subtrahatur hic terminus ipse.

Prima ex hac praeceptione:

$$\text{I.}\quad \overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n+1}{\Delta}{}^{k-1} y - \overset{n}{\Delta}{}^{k-1} y$$

sequitur directe, esse:

$$\text{II.}\quad \overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n-1}{\Delta}{}^{k+1} y + \overset{n-1}{\Delta}{}^k y \quad \text{atque}$$

$$\text{III.}\quad \overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n+1}{\Delta}{}^k y - \overset{n}{\Delta}{}^{k+1} y$$

Si discerptio, quae per formulam primam exprimitur, in se ipsam applicatur, fit primum:

$$\overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n+2}{\Delta}{}^{k-2} y - 2\overset{n+1}{\Delta}{}^{k-2} y + \overset{n}{\Delta}{}^{k-2} y$$

tum:

$$\overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{n+3}{\Delta}{}^{k-3} y - 3\overset{n+2}{\Delta}{}^{k-3} y + 3\overset{n+1}{\Delta}{}^{k-3} y - \overset{n}{\Delta}{}^{k-3} y.$$

Si nunc ad hanc legem generaliter demonstrandam ponitur:

$$\overset{n}{\Delta}{}^{k}y =$$

$$\overset{n+r}{\Delta}{}^{k-r}y - {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{B}}\overset{n+r-1}{\Delta}{}^{k-r}y \ldots (-1)^{h}\,{}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}}\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-r}y \,..\, (-1)^{r}\,\overset{n}{\Delta}{}^{k-r}$$

eum terminum discerptionis $r + 1^{tae}$, in quo $\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y$ inest, ex termino $h + 1^{to}$ et h^{to} discerptionis r^{tae}, et ex nullo alio exstiturum esse, satis apparet.

Discerpitur enim;

$$(-1)^{h}\,{}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k+r}y \quad \text{in}$$

$$(-1)^{h}\,{}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}}\left\{\overset{n+r-(h-1)}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y - \overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y\right\}$$

quarum pars secunda ad novum terminum pertinet. Discerpitur deinde:

$$(-1)^{h+1}\,{}^{r}\overset{h+1}{\mathfrak{B}}\,\overset{n+r-(h+1)}{\Delta}{}^{k-r}y \quad \text{in}$$

$$(-1)^{h+1}\,{}^{r}\overset{h+1}{\mathfrak{B}}\left\{\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y - \overset{n+r-(h+1)}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y\right\}$$

quarum pars prima in novum spectat terminum, qui ergo est:

$$(-1)^{h+1}\,{}^{r}\overset{h+1}{\mathfrak{B}}\,\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y - (-1)^{h}\,{}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y$$

$$= (-1)^{h+1}\left\{{}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}} + {}^{r}\overset{h+1}{\mathfrak{B}}\right\}.\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y$$

$$= (-1)^{h+1}\;{}^{r+1}\overset{h+1}{\mathfrak{B}}\,\overset{n+r-h}{\Delta}{}^{h-(r+1)}y.$$

seu, si pro $h + 1$ valor h substituitur:

$$= (-1)^{h}\;{}^{r+1}\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{(n+r+1)-h}{\Delta}{}^{k-(r+1)}y$$

Ex quo sequitur, eam legem pro omni valore ips. r sequente valere, si pro antecedente demonstrata est, i. e. illam legem esse generalem.

Gaudemus igitur formula generali:

$$\text{IV.}\quad \overset{n}{\Delta}{}^{k} y = \overset{h}{o\ldots r}\, S\, (-1)^{h}\, {}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k-r} y.$$

Si pro r valor k substituitur, i. e. si discerptionem usque ad $\Delta^{0} y$ seu y pergimus, exsistit formula:

$$\overset{n}{\Delta}{}^{k} y = \overset{h}{o\ldots k}\, S\, (-1)^{h}\, {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{n+k-h}{y}$$

Regula, quam dat secunda formula, in se ipsam applicata, offert:

$$\text{V.}\quad \overset{n}{\Delta}{}^{k} y = \overset{h}{o\ldots r}\, S\, {}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{k+h}{\Delta}{}^{n+r} y$$

atque post n indiscerptiones erit:

$$\overset{n}{\Delta}{}^{k} y = \overset{h}{o\ldots n}\, S\, {}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{o}{\Delta}{}^{k+h}$$

pro $k = o$ adest:

$$\overset{n}{y} = \overset{h}{o\ldots n}\, S\, {}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{o}{\Delta}{}^{h}$$

per quam formulam in theoria serierum facile ex differentiis notis terminus generalis et seriei principalis et summatoriae deduci potest.

Ex aequatione III. sequitur denique

$$\text{VI.}\quad \overset{n}{\Delta}{}^k y = \overset{h}{o\ldots r}\, S(-1)^h \, {}^r\overset{h}{\mathfrak{B}} \, \overset{n+r-h}{\Delta}{}^{k+h} y$$

pro $n = r$ et $k = o$ adest:

$$\overset{n}{y} = \overset{h}{o\ldots n}\, S(-1)^h \, {}^n\overset{h}{\mathfrak{B}} \, \overset{2n-h}{\Delta}{}^h y$$

Quomodo functiones in algebraicas et transcendentes dividuntur, eo quoque series ex illis ortae dividi debent.

Quaeque functio algebraica gradum habet quondam; ita etiam series algebraicae, quae est gratus n^{ti}, si functio, ex qua producta est, n^{ti} gradus est.

Sit igitur series algebraica quaedam n^{ti} gradus, et functio ejus, (quia quaecunque functio algebraica sub hanc formam redigi potest) ita:

$$\overset{0}{A}x^n + \overset{1}{A}x^{n-1} + \ldots + \overset{h}{A}x^{n-h} \ldots$$

series differentiarum k^{tarum} ejus sit gradus p^{ti}, cujus functio sit:

$$\overset{0}{K}x^p + \overset{1}{K}x^{p-1} + \ldots + \overset{h}{K}x^{p-h} \ldots$$

quae est $= \overset{0}{\Delta}{}^k y$, ergo:

$$\overset{1}{\Delta}{}^k y = \overset{0}{K}(x+\Delta x)^p + \overset{1}{K}(x+\Delta x)^{p-1} \ldots \overset{h}{K}(x+\Delta x)^{p-h} \ldots$$

$$= \overset{0}{K} x^p + \overset{0}{K}{}^p\overset{1}{\mathfrak{B}} x^{p-1}\Delta x \ldots \overset{0}{K}{}^p\overset{h}{\mathfrak{B}} x^{p-h}\Delta x^h \ldots$$

$$+ \overset{1}{K}{}^{p-1}\overset{0}{\mathfrak{B}} x^{p-1} \ldots \overset{1}{K}{}^{p-1}\overset{h-1}{\mathfrak{B}} x^{p-h}\Delta x^{h-1} \ldots$$

$$\vdots$$

$$+ \overset{m}{K}{}^{p-m}\overset{0}{\mathfrak{B}} x^{p-m} \ldots \overset{m}{K}{}^{p-m}\overset{h-m}{\mathfrak{B}} x^{p-h}\Delta x^{h-m} \ldots$$

$$\vdots$$

$$+ \overset{h}{K}{}^{p-h}\overset{0}{\mathfrak{B}} \ldots$$

est igitur:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}\overset{1}{\Delta}{}^k y = \overset{m}{0\ldots h}\, S(\overset{m}{K}{}^{p-m}\overset{h-m}{\mathfrak{B}} x^{p-h}\Delta x^{h-m})$$

cum autem:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}\overset{1}{\Delta}{}^k y - \overset{h}{\mathfrak{T}}\overset{0}{\Delta}{}^k y = \overset{h}{\mathfrak{T}}\overset{0}{\Delta}{}^{k+1} y,$$

adest:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}\overset{0}{\Delta}{}^{k+1} y = \overset{m}{0\ldots(h-1)}\, S(\overset{m}{K}{}^{p-m}\overset{h-m}{\mathfrak{B}} x^{p-h}\Delta x^{h-m})$$

Si ergo functio k^{tarum} differentiarum est:

$$\overset{0}{K}x^p + \overset{1}{K}x^{p-1} \ldots \overset{h}{K}x^{p-h} \ldots$$

erit ea seriei $(k+1)^{tarum}$ differentiarum:

$$\overset{0}{K}{}^p\overset{1}{\mathfrak{B}}\Delta x \cdot x^{p-1} \ldots$$

h. e. si functio seriei k^{tarum} differentiarum est gradus p^{ti}, erit ea seriei k^{tarum} differentiarum gradus $p-1^{ti}$, et si igitur series principalis gradus est n^{ti}, erit series k^{tarum} differentiarum gradus $n-k^{ti}$.

Si igitur n numerum repraesentat positivum integrum, i. e. si functio seriei principalis est rationalis integra, erit series differentiarum n^{tarum} gradus o^{ti}, h. e. omnes termini iidem sunt.

Sit ergo summus terminus alicujus functionis rationalis integrae $= \overset{0}{A} x^n$ erit terminus summus functionis seriei primarum differentiarum:

$$= A\, {}^n\mathfrak{B} \overset{0}{\Delta} \overset{1}{x} \,.\, x^{n-1}$$

atque is functionis secundarum:

$$= \overset{0}{A}\, {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, {}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}} \Delta x^2 \,.\, x^{n-2}$$

tam is functionis tertiarum:

$$= \overset{0}{A}\, {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} \,.\, {}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}} \,.\, {}^{n-2}\overset{1}{\mathfrak{B}} \Delta x^3 \,.\, x^{n-3}$$

generaliter k^{tarum}:

$$= \overset{0}{A}\, {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, {}^{n-1} \,.\, \overset{1}{\mathfrak{B}} \ldots {}^{n-(k+1)}\overset{1}{\mathfrak{B}} \,.\, \Delta x^k \,.\, x^{n-k}$$

summus et unicus terminus expressionis seriei n^{tarum} differentiarum denique:

$$= A\, {}^n\mathfrak{B} \,.\, {}^{n-1}\mathfrak{B} \ldots {}^1\mathfrak{B} \Delta x^n$$

$$= \overset{0}{A}\, {}^n_p \Delta x^n$$

Pro $\Delta x = 1$ et $A = 1$ ergo terminus quicunque seriei ultimarum differentiarum aequalis est numero permutationis gradus summae dignitatis functionis.

His praemissis propositionibus ex calculo differentiarum facile est theorema taylorianum deducere.

Termini primi serierum differentiarum, $\overset{0}{\Delta}{}^1 y$, $\overset{0}{\Delta}{}^2 y$ etc., quos etiam sic designare solent: $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y$ etc. sunt quantitates maxime graves atque praesertim *differentiae* vocantur, ita, ut e. gr. $\Delta^r y$ differentia r^{ta} est ips. y. Quomodo hae differentiae ex y, $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}$ etc. exsistunt, supra dictum est. Ad quas formandas expressionem habemus independentem:

$$\Delta^m y = 0 \ldots \overset{h}{m}\, S(-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{m-h}{y}$$

atque formulam recursionis:

$$\Delta^m y = \overset{1}{\Delta}{}^{m-1} y - \Delta^{m-1} y$$

Omnem functionem ips. x, pro x quantitate binominali substituto, in seriem secundum potentias secundae partis illius quantitatis binomialis progredientem resolvi posse, Analysis docet, ita, ut:

$$\overset{m-h}{y} = y + \overset{1}{A}(m-h)\Delta x + \overset{2}{A}(m-h)^2 \Delta x^2 \ldots$$
$$+ \overset{r}{A}(m-h)^r \Delta x$$

est igitur:

$$\overset{m}{y} = y + \overset{1}{A} m \triangle x \ldots + \overset{r}{A} m^r \triangle x^r \ldots$$

$$-{}^m\mathfrak{B}\overset{1\ m-1}{y} = {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}y - {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\overset{1}{A}(m-1)\triangle x \ldots - {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\overset{r}{A}(m-1)^r\triangle x^r \ldots$$

$$\vdots$$

$$(-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}\overset{m-h}{y} = (-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}y \ldots (-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}\overset{r}{A}(m-h)^r\triangle x^r$$

$$\vdots$$

$$y = y$$

est ergo terminus r^{tus} ips. $\triangle^m y$, sive

$$\overset{r}{\mathfrak{T}}\triangle^m y = o \overset{h}{\ldots} m\, S[(-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}\overset{r}{A}(m-h)^r\triangle x^r]$$

$$= o \overset{h}{\ldots} m\, S[(-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^r]\overset{r}{A}.\triangle x^r$$

Expressio autem $(m-h)^r$, si pro h valores substituuntur ab o usq. ad m repraesentat seriem numerorum naturalium, qui omnes ad potentiam r^{tam} sublati sunt, et expressio:

$$o \overset{h}{\ldots} m\, S(-1)^h\, {}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^r$$

nihil significat aliud, quam terminum initialem seriei m^{tarum} differentiarum seriei principalis: m^r, $(m-1)^r$, ... 1^r, ita, ut:

$$\overset{r}{\mathfrak{T}}\triangle^m y = \triangle^m(m-h)^r\overset{r}{A}\triangle x^r$$

Tam diu autem $r < m$, quam diu est

$$\overset{r}{\mathfrak{T}}\triangle^m y = o,$$

si tandem $r = m$ fit, $\overset{r}{\mathfrak{T}} \triangle^m y$ realis est, ita ergo ut terminus initialis seriei pro $\triangle^m y$ cum $\overset{m}{\mathbf{A}} \triangle x^m$ incipiat.

Si autem $r = m$, adest:

$$\triangle^m (m-h)^r = {}^m_p$$

est ergo:

$$\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^m y = {}^m_p \overset{m}{\mathbf{A}} \triangle x^m.$$

Ex quo autem sequitur, coefficientem adhuc fictum, $\overset{m}{\mathbf{A}}$, esse:

$$= \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^m y}{{}^m_p \triangle x^m}$$

Si ergo pro $\overset{1}{\mathbf{A}}$, $\overset{2}{\mathbf{A}}$ etc. valores $\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^1 y$, $\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^2 y$ etc. substituuntur, fit generaliter:

$$\overset{m}{y} = y + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^1 y \,.\, m}{1} + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^2 y \,.\, m^2}{1\,.\,2} \dots + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^r y \,.\, m^r}{1\,.\,2\,..\,r} \dots$$

et pro $m = 1$ adest:

$$\overset{1}{y} = y + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^1 y}{1} + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^2 y}{1\,.\,2} \dots + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^r y}{1\,.\,2\,..\,r} \dots$$

seu:

$$\overset{1}{y} - y = \triangle^1 y = \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^1 y}{1} + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^2 y}{1\,.\,2} \dots + \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}} \triangle^r y}{1\,.\,2\,..\,r} \dots$$

Ex quo autem satis elucet, terminos primos seu initiales differentiarum quantitates esse maxime graves, atque ex his facile deductis differentiam ips. y sine ullo negotio formari posse.

Quibus igitur terminis initialibus nomina praebent peculiaria atque generaliter terminum initialem m^{tae} differentiae ips. y *differentiale* m^{tum} vocant et per $d^m y$ designant, ita, ut:

$$\overset{1}{\mathfrak{S}}\Delta^m y = d^m y \text{ et } \overset{1}{\mathfrak{S}}\Delta y = dy,$$

quod praesertim differentiale ips. y appellatur. Propositio itaque illa ita exprimitur:

$$\Delta y = \frac{dy}{1} + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} \dots \frac{d^r y}{1.2\dots r} \dots$$

Expressio autem $\overset{1}{\mathfrak{S}}\Delta^m y$ sey $d^m y$ factorem continet Δx^m, si igitur, ut solent, pro $\frac{d^m y}{\Delta x^m}$ *) signo utimur simpliciori, ex. gr. $\overset{m}{\mathfrak{D}}$, (ratio differentialis m ') adest:

*) Si $y = \varphi(x)$, exstat differentiale ips. y, nam Δy per seriem secundum potentias ips. Δx progredientem exprimi potest. Attamen x non functio est alius quantitatis, z, Δx ergo per seriem secundum potentias ips. Δz progredientem resolvi nequit, atque differentiale ips. x seu dx est notio absurda. Quare postea signo dx non utemur.

$$\Delta y = \frac{\overset{1}{\mathfrak{D}}\Delta x^1}{1} + \frac{\overset{2}{\mathfrak{D}}\Delta x^2}{1.2} \ldots + \frac{\overset{r}{\mathfrak{D}}.\Delta x^r}{1.2..r}$$

Quae est forma simplicissima theorematis tayloriani, consideratio tamen generalior computum postulat ips. $\Delta^m y$.

Est:

$$\overset{k}{\mathfrak{T}}\Delta^m y = o\overset{h}{\ldots}m\,S[(-1)^h\,{}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}.(m-h)^k].\overset{k}{\mathfrak{D}}.\overset{-k}{p}.\Delta z^k$$

ubi autem k non minor, quam m esse debet, ita, ut terminus primus ips. $\Delta^m y$ sit is, in quo $k = m$.

Si ergo expressio $o\overset{h}{\ldots}m\,S[(-1)^h\,{}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^k]$ per ${}^m\overset{k}{K}$ indicatur, adest:

$$\Delta^m y = {}^m\overset{m}{K}.\overset{m}{\mathfrak{D}}.\overset{-m}{p}.\Delta x^m \ldots + {}^m\overset{m+r}{K}.\overset{m+r}{\mathfrak{D}}.\overset{-(m+r)}{p}.\Delta x^{m+r} \ldots$$

sive, quia:

$$\begin{aligned} {}^m\overset{m}{K} &= o\overset{h}{..}m\,S[(-1)^h\,{}^m\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^m] \\ &= \Delta^m(m-h)^m = \overset{m}{p}, \end{aligned}$$

$$\Delta^m y = \overset{m}{\mathfrak{D}}.\Delta x^m + \ldots + {}^m\overset{m+r}{K}.\overset{m+r}{\mathfrak{D}}.\overset{-(m+r)}{p}.\Delta x^{m+r} \ldots$$

Ad coefficientem ${}^m\overset{m+1}{K}$, ${}^m\overset{m+2}{K}$ etc. computum expressionem habemus independentem, sed valde complicatam, disquiremus igitur, an simplicius exhiberi possit.

Est:

$${}^{m}\overset{m+r-1}{K} = {}^{m}\overset{0}{\mathfrak{B}}\, m^{m+r-1} - {}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}(m-1)^{m+r-1} \dots (-1)^{h}\, {}^{m}\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^{m+r-1} \dots (-1)^{m-1}\, {}^{m}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}, \text{ et}$$

$${}^{m-1}\overset{m+r-1}{K} = \qquad {}^{m-1}\overset{0}{\mathfrak{B}}(m-1)^{m+r-1} \dots (-1)^{h-1}\, {}^{m-1}\overset{h-1}{\mathfrak{B}}(m-h)^{m+r-1} \dots (-1)^{m-2}\, {}^{m-1}\overset{m-2}{\mathfrak{B}}$$

Quarum quantitatum additione fit:

$${}^{m}\overset{m+r-1}{K} + {}^{m-1}\overset{m+r-1}{K} = {}^{m-1}\overset{0}{\mathfrak{B}}\, m^{m+r-1} - {}^{m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(m-1)^{m+r-1} \dots (-1)^{h}\, {}^{m-1}\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^{m+r-1} \dots (-1)^{m-1}\, {}^{m-1}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}$$

et:

$$m({}^{m}\overset{m+r-1}{K} + {}^{m-1}\overset{m+r-1}{K}) = {}^{m}\overset{0}{\mathfrak{B}}.\, m^{m+r} - {}^{m}\overset{1}{\mathfrak{B}}(m-1)^{m+r} \dots (-1)^{h}\, {}^{m}\overset{h}{\mathfrak{B}}(m-h)^{m+r} \dots (-1)^{m-1}\, {}^{m}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}$$

$$\text{i. e. } {}^{m}\overset{m+r}{K} = m.\,[{}^{m}\overset{m+r-1}{K} + {}^{m-1}\overset{m+r-1}{K}]$$

vel, si ambas partes aequationis per numerum permutationis m^{ti} gradus i. e. per $\overset{m}{p}$ dividuntur seu per $\overset{-m}{p}$ multiplicantur, exsistit formula recursionis:

$$\overset{-m}{p}.\, {}^{m}\overset{m+r}{K} = \overset{-(m-1)}{p}.\, {}^{m}\overset{m+r-1}{K} + \overset{-(m-1)}{p}.\, {}^{m-1}\overset{(m-1)+r}{K} \quad \text{sive:}$$

$$\overset{-m}{p}.\, {}^{m}\overset{m+r}{K} = \overset{-m}{p}.\, {}^{m}\overset{m+(r-1)}{K}.\, m + \overset{-(m-1)}{p}.\, {}^{m-1}\overset{(m-1)+r}{K}$$

Cum autem:

$$\overset{r}{C}[1\,..\,m] = \overset{r-1}{C}[1\,..\,m]\,.\,m + \overset{r}{C}[1\,..\,(m-1)]$$

sequitur ex identitate harum recursionum, esse:

$$\overset{-m}{p}\,.\,{}^{m}\overset{m+r}{K} = \overset{r}{C}[1\,..\,m] \quad \text{et:}$$

$${}^{m}\overset{m+r}{K} = \overset{m}{p}\,.\,\overset{r}{C}[1\,..\,m]$$

Terminus ergo r^{tus} post initialem ips. $\Delta^{m}y$ est:

$$= \overset{m}{p}\,.\,\overset{-(m+r)}{p}\,.\,\overset{r}{C}[1\,..\,m]\,.\,\overset{m+r}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{m+r}$$

$$= {}^{m+r}\overset{-(r-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\,.\,\overset{r}{C}[1\,..\,m]\,.\,\overset{m+r}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{m+r}\,\ldots$$

si per ${}^{m+r}\overset{-(r-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$ indicatur *facultas* baseos $m+r$, differentiae -1 atque exponentis $-(r-1)$.

Est ergo:

$$\Delta^{m}y = \overset{m}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{m} + {}^{m+1}\overset{-0}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\,.\,\overset{1}{C}[1\,..\,m]\,.\,\overset{m+1}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{m+1}\ldots$$

$$+ {}^{m+r}\overset{-r-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\,.\,\overset{r}{C}[1\,..\,m]\,.\,\overset{m+r}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{m+r}\ldots$$

pro $m = 1$ theorema taylorianum in simplicissima forma exsistere debet, nam est generaliter tunc:

$${}^{m+r}\overset{-(r-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \overset{-(r+1)}{p} \quad \text{et} \quad \overset{r}{C}[1\,...\,m] = 1 \quad \text{i. e.}$$

$${}^{m+r}\overset{-(r-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\,.\,\overset{r}{C}[1\,..\,m]\,.\,\overset{m+r}{\mathfrak{D}}\,\Delta x^{m+r} = \overset{-(r+1)}{p}\,.\,\overset{r+1}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{r+1} \quad \text{ergo}$$

$$\Delta y = \overset{1}{\mathfrak{D}}\,\Delta x + \overset{-2}{p}\,\overset{2}{\mathfrak{D}}\,\Delta x^{2}\ldots + \overset{-r}{p}\,.\,\overset{r}{\mathfrak{D}}\,.\,\Delta x^{r}\ldots$$

DE

QUANTITATE FLUENTE.

Sectio I.

De fluente in genere.

§. 1.

Fluens, functio.

Quantitas fluens est quantitas variabilis, quae, si ei occasio attribuitur, lege semper semperque eadem continuo mutatur, i. e. crescit vel decrescit; est continuum in statu exsistendi.

Sequitur ex hoc:

I. *eam, ut a statu quodam in alterum transeat, omnes inter eos jacentes valolores gradatim percurrere, atque nullum valorem praeterire, opus esse.*

II. *Eam omnino, i. e. in omnibus suis particulis legem illam persequi.*

III. *A statu quodam in repugnantem*

transire non posse, sine percurrendo statu 0.

IV. Si ante et post statum aliquem eundem habet signum, in statu ipso signum repugnantem habere non posse.

V. In statu quocunque quandam facultatem mutandi se habere, atque hanc facultatem partim a lege illa, partim a statu, in quo fluens est, dependere.

Si fluens mutata est, incrementum vel decrementum partim a facultate mutandi, partim ab occasione ei attributa dependit.

Quae lex autem, ut notum est, semper per expressionem ex quantitatibus primariis et aliis quomodocunque compositam, sive per functionem exprimitur, ita, ut, si pro x omnes substituuntur valores, functio eo omnes valores percurrat, quos fluens illa accipere potest. Si x crescit, eo fluenti occasio mutandi datur, atque, quo magis crescit, i. e. quo majus incrementum ips. x, seu Δx est, eo magis fluens, eadem lege, mutatur.

Hic igitur quantitas primaria, x, est quantitas *variabilis* atque functio est: *expressio legis, secundum quam fluens aliqua mutatur. Calculus differentialis est methodus* *cognoscendi continuum in statu exsistendi.*

§. 2.

Facultas mutandi.

Fluxus primum aut verum crescere aut decrescere esse, tum aut aequabilitate aut inaequabilitate fieri potest; fluxus denique inaequabilis aut acceleratione aut retardatione fluit, i. e. facultas aut major majorque aut minor minorque fit.

Fluens aequabilis in statu quocunque eadem occasione aeque mutatur, i. e. facultas mutandi in omnibus locis eadem est, et $\triangle y$ invenitur, si multiplicetur facultas illa constans in incrementum ips. x.

Attamen inaequabilis fluentis facultas mutandi variabilis est, ab x dependit, i. e. functio est ips. x sive: facultas mutandi inaequabilis fluentis est denuo fluens.

Si facultatem mutandi *crescentis fluentis* positivam nominamus, eam negativam vocari debere, si decrescat, satis apparet. Si autem decrescit, ad 0 pervenit et tum negative crescit, facultas mutandi quoque negativa esse debet, si in statu negativo decrescit, positiva.

Ex quo propositionem detrahimus maxime profundam, secundum quam

VI. facultas mutandi alicujus fluentis crescentis ei est ratione signi consentiens, decrescentis autem cum eo repugnans.

Pari autem modo; ut regula formali pro fluente ipsa gaudemus, pro facultate mutandi ejus etiam talem habere debemus.

Quae, quia fluens est, a fluente illa, cujus est facultas, dependens, functione ejusdem quantitatis, x, a functione primae fluentis derivata exprimi posse debet.

Sit facultas mutandi pro valore x, $= r$, erit pro valore $x + \Delta x$, $= r + \Delta r$.

Si nunc fluens in statu primo aequabiliter mutatur, est:

$$\Delta y = r \,.\, \Delta x$$

si in altero statu aequabiliter mutatur, est:

$\Delta y = (r + \Delta r)\, \Delta x$, et quia r functio est ips. x, erit: $\Delta y = r \,.\, \Delta x + a \Delta x^2 + \ldots$

Si autem fluens inaequabiliter mutatur, illi valores pro Δy aut majores aut minores sunt, quam Δy; sed varietas in coefficientes $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$ ...

versatur atque incrementum Δy per seriem secundum potentias ips. Δx, cujus terminus initialis est $r . \Delta x$, progredientem exprimi posse, satis elucet. Erit igitur:

$$dy = r . \Delta x \quad \text{et:}$$

$$r = \frac{dy}{\Delta x} = \overset{1}{\mathfrak{D}}.$$

Propositione igitur Mathesi quam maxime profunda gaudemus:

VII. rationem differentialem primam ex aequatione inter x et y detractam expressionem esse facultatis mutandi fluentis aequatione illa determinatae.

Quae facultas, quia fluens est, denuo facultatem mutandi habere debet, quae aut constans est, si facultas prima functione primi gradus exprimitur, aut variabilis, si non, et ita porro.

Si functio alicujus fluentis est:

$$y = \varphi(x) \quad \text{erit}$$

facultas mutandi ips. y

$$= \frac{dy}{\Delta x} \quad \text{item:}$$

facultas facultatis mutandi:

$$= \frac{d\left\{\frac{dy}{\Delta x}\right\}}{\Delta x} = \frac{d^2 y}{\Delta x^2}, \text{ item,}$$

si haec adhuc fluens est, facultas tertia:

$$= \frac{d^3 y}{\Delta x^3} \text{ et ita porro.}$$

§. 3.

Fluxus accelerans et retardans.

Nostrum autem est, disquirere, quomodo fiat fluxus in genere atque conditiones detegere.

Fluxus fiat inaequalitate, ita ergo, ut facultas mutandi adhuc functio ips. x sit, quae sunt conditiones, si fluens acceleratione vel retardatione mutatur?

Si fluens acceleratione mutatur, facultas mutandi major majorque fieri debet, i. e. $\frac{dy}{\Delta x}$ crescit, si x crescit, facultas ejus ergo, h. e. $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ cum $\frac{dy}{\Delta x}$ ratione signi consentiens esse debet. (§. 2. VI.) Si autem fluens retardatione mutatur, facultas mutandi in progressu minor fit minorque, i. e. si x crescit, $\frac{dy}{\Delta x}$ decrescit, facultas ejus ergo, h. e. $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ cum $\frac{dy}{\Delta x}$ repugnans esse debet. (§. 2. VI.)

VIII. Si igitur fluens in statu positivo versatur, et acceleratione mutatur, atque:

si crescit, est $\frac{dy}{\Delta x} = +, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} = +$

si decrescit, est: $\frac{dy}{\Delta x} = -, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} = -$

Si retardatione mutatur, et:

si crescit, est: $\frac{dy}{\Delta x} = +, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} = -$

si decrescit, est: $\frac{dy}{\Delta x} = -, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} = +$

Si autem fluens in statu negativo est, et acceleratione mutatur, atque:

si crescit, est: $\frac{dy}{\Delta x} = -, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} = -$

si decrescit, est: $\frac{dy}{\Delta x} = +, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} = +$

retardatione autem,

$$\text{si crescit, est: } \frac{dy}{\Delta x} = -, \; \frac{d^2y}{\Delta x^2} = +$$

$$\text{si decrescit, est: } \frac{dy}{\Delta x} = +, \; \frac{d^2y}{\Delta x^2} = -$$

Fluens ex retardatione in accelerationem vel contra transire potest, quae sunt conditiones?

Ex natura fluentis sequitur:

si fluens decrescit, ad 0 pervenit, et tum in statu repugnante denuo crescit, facultatem mutandi ante statum 0, quia decrescebat, ratione signi cum hoc statu repugnantem, in statu autem post 0, quia crescit, cum hoc statu consentientem, i. e. cum statu ante 0 repugnantem esse debet; (§. 2. VI.) item, eam in statu 0 fluentis cum statu ante 0 fluentis consentientem esse non posse. (§. 1. IV.) h. e.

IX. Supra dicta conditione, facultatem mutandi omnino repugnantem esse debere cum statu fluentis ante 0.

Si igitur fluens a fluxu accelerante in retardantem transit, vel contra, facultas facultatis mutandi a statu cum fluente consentiente in repugnantem transire debet, vel contra, i. e.

$\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ in eo statu $= 0$ esse debet (§. 1. III.) Deinde facultas mutandi ips. $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$, i. e. $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ in casu primo cum fluente repugnans in altero ei consentiens erit. (§. 3. IX.) h. e.

X. *Si fluens in eo statu versionis est, semper erit* $\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = 0$; *insuper autem, si fluens positiva est, et ab acceleratione in retardationem transit, est:* $\frac{d^3 y}{\Delta x^3} = -$, *a retardatione autem in accelerationem, est* $\frac{d^3 y}{\Delta x^3} = +$. *Si fluens negativa est, in casu primo:* $\frac{d^3 y}{\Delta x^3} = +$, in altero: $\frac{d^3 y}{\Delta x^3} = -$

§. 4.

Maxima et minima fluentis in genere.

Maximum is status fluentis appellatur, si crescens summum valorem accepit, atque in eo est, ut decrescat.

Minimum is vocatur status fluentis, si decrescens minimum valorem accepit, et nunc in eo est, ut decrescat.

In statu maximo, quia $\frac{dy}{\Delta x}$ antea cum fluente consentiens fuerit, postea repugnans fit (VI.), est $\frac{dy}{\Delta x} = 0$, (III.). Insuper autem $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ cum $\frac{dy}{\Delta x}$ ante statum 0 fluentis repugnans est, h. e. fluenti etiam repugnans (IX.).

In statu autem minimo, quia $\frac{dy}{\Delta x}$ antea fluenti repugnans, postea ei consentiens est, irit: $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ et $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ ipsi $\frac{dy}{\Delta x}$ ante statum 0 fluentis repugnans, i. e. cum fluente consentiens.

XI. Sit igitur fluens in statu maximo vel minimo, semper est $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ *atque in casu primo* $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ *cum fluente repugnans, in altero ei consentiens.*

In statu maximo vel minimo fluens non habet facultatem mutandi, atque hic fluxus desisinere debeat, nisi illa annihilata facultas denuo facultatem haberet mutandi.

Quae facultas facultatis mutandi, quia ante et post statum maximi vel minimi secum ipso consentiens est, in statu eo nunquam ad 0 pervenire potest. Si fluens habet maximum valorem vel minimum, ratio differentialis secunda ex aequatione fluentem exprimente detracta, realis esse debet.

XII. Si igitur ad determinandum valorem ips. x, pro quo y est maximum vel minimum, ponitur, esse $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ *et invenitur, rationem differentialem secundam pro eodem valore ips. x quoque fieri $= 0$, apparet, fluentem maximum vel minimum valorem non habere.*

Sequitur insuper ex supra dicto:

XIII. Si fluens in statu maximo versatur, antea eam retardatione crevisse, *postea autem acceleratione decreturam esse; item: si in statu minimo est, antea retardatione decrevisse, postea acceleratione creturam esse.*

Sectio II.

Applicationes illarum propositionum generalium in quantitates fluentes reales.

---

§. 5.

Notio fluxus in notione nititur *motus.* Sine motu non est fluxus. Si autem motu ad tempus respicitur, consideratio in *Mechanicen* spectat, si non, in *Geometriam.*

In primo casu, si aequatio inter spatium et tempus est: $s = \varphi(t)$, celeritas est facultas movendi

$$= \frac{ds}{\Delta t}$$ atque vis est facultas facultatis movendi

$$= \frac{d^2 s}{\Delta t^2}.$$

In quo singulari systema cum nomine scientiae conveniens nititur Mechanices sublimioris.

Attamen quoque in Geometria sublimiori hae notiones materiam ubrem satis praebent.

Proprietates curvarum generales ex his perfacile, ac modo cum scientiae nomine conveniente producuntur.

§. 6.

Curva in genere.

Fluente in genere consideranda primum de accelerante et retardante fluxu egimus, sic etiam hic. Sequitur ex sect. I.:

XIV. Curvam aut crescere, aut decrescere, item in primo casu $\frac{dy}{\triangle x}$ *esse consentientem, in alterum repugnantem cum ordinata.*

In puncto M, (fig. 1.) tres lineae, MQ, MB, MS, eadem facultate mutandi crescant ita, ut MQ in progressu retardatione, MB aequabilitate, et MS acceleratione crescant.

MB est linea recta, MQ, quia ejus facultas mutandi minor minorque fit, omnino sub recta MB, MS autem, quia facultas ejus major fit majorque, semper super lineam rectam permanere debet.

MQ autem retardanter, MB aequabiliter ac MS acceleranter crescens in M inveniant. Facultates igitur primae, MQ, ab T usque ad M majores, facultates tertiae autem, VM, minores, quam facultas lineae rectae fuisse debent.

Omnes autem tres, quia in M eandem habent magnitudinem, necesse est, TM prius, sed VM serius, quam linea recta incipisse crescendi debeat, ita, ut VM, si recta incipit, jam ad valorem, Aa, atque si TM incipit, recta ad valorem Tt, VM autem ad valorem Ts jam pervenerit. In M modo omnes tres lineae conveniunt. TM igitur usque ad M semper infra rectam, VM autem ab V usque ad M supra eam fluit. Ambabus curvis nonnisi punctum M cum recta est commune ita, ut a recta non secentur. Linea autem talis *tangens* curvae AQ vel VS vocatur.

XV. Tam diu ergo retardatione fluit curva, seu, tam diu $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ *cum y repugnans est, quam diu tangens extra curvam, tam diu autem acceleratione fluit, h. e. tam diu* $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ *cum y consentiens est, quam diu tangens infra curvam jacet. In casu autem primo curva concava, in altero convexa appellatur.*

Aequatio lineae rectae AB est;

$$y = x \cdot \text{tang. } BAP.$$

facultas mutandi ejus ergo:

$$= \text{tang. } BAP.$$

quae est etiam facultas mutandi ambárum curvarum in eo loco, M, sequitur ergo:

XVI. facultatem mutandi curvae in aliquo loco esse tang. ejus anguli, quem tangens curvae in eo loco cum abscissa format; item: ponenda tangente in aliquo loco, tang. $BAP = \frac{dy}{\Delta x}$ *esse debere.*

Si curva decrescenter consideratur, apparet, esse:

$$\text{tang. } BMR = - \text{tang. } rMA.$$

(fig. 2.) i. e.

XVII. Curvam in aliquo loco totidem facultatis habere crescendi, quot decrescendi.

Sequitur ex his:

Si curva concava crescit, facultatem decrescere, si autem concava decrescit, facultatem crescere; si curva convexa crescit, facultatem ejus quoque cresoere, si decrescit, facultatem decrescere, seu:

XVIII. Convexam acceleratione crescere, retardatione decrescere; concavam retardatione crescere, acceleratione decrescere.

§. 9.

Maxima, minima et puncta conversionis curvarum.

E sectione I. sequitur:

XIX. Si curva in statu maximo est, antea eam concave crevisse, postea concave decreturam; si autem in statu minimo versatur, eam antea convexe decrevisse, postea convexe creturam esse;

item: in casu primo $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ *cum ordinata repugnantem, in altero consentientem,* $\frac{dy}{\Delta x}$ *autem semper* $= 0$ *esse. Item: si curva a concavitate in convexitatem transit, esse* $\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = 0$, *et* $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ *cum ordinata consentientem, si autem a convexitate ad concavitatem transit, esse* $\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = 0$ *sed* $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ *cum ordinata repugnantem.*

§. 10.

De invenienda functione quantitatis fluentis.

Saepe functio fluentis incognita est, sed a fluente altera dependit, pro qua functio est cognita. E functione cognita hujus fluentis semper facultas mutandi primae fluentis deduci potest, quae est ratio differentialis prima illius functionis incognitae per integrationem tum inveniendae.

Quaeritur e. gr. data abscissa, longitudo, s, alicujus curvae, cujus functio sit:

$$y = \varphi(x)$$

longitudo s ab $\varphi(x)$ dependit, ita, ut ponamus

$$s = \chi[\varphi(x)] = \psi(x)$$

Quo magis crescit ordinata, eo magis removetur S ab M (fig. 3.), i. e. eo magis longitudo curvae crescit. Ordinatis itaque acceleratione crescentibus longitudo curvae quoque acceleratione crescit, sed retardatione crescentibus, retardatione; h. e.

XX. Curvae concavae crescentis et convexae decrescentis longitudo, retardatione, sed curvae concavae decrescentis et convexae crescentis longitudo acceleratione, rectae denique crescentis et decrescentis longitudo aequabilitate crescit.

A puncto M (fig. 1.) tres lineae, MQ, MB, MS eadem facultate ita crescant, ut longitudo ips. MQ in progressu retardatione, ips. MB aequabilitate et ips. MS acceleratione crescat. Quae autem in M eo modo crescentes invenerint; sequitur, ut supra, AB esse tangentem curvae TMQ vel VMS.

Aequatio pro longitudine lineae rectae AB, (fig. 4.) est:

$$y = x \,.\, \text{Sec. BAM.}$$

XXI. Facultas mutandi ergo longitudinis curvae in aliquo loco, M, est sec. anguli, quem tangens curvae in M cum abscissa format.

Si igitur supponitur functio:

$$s = \chi(x) \text{ erit:}$$

$$\frac{ds}{\Delta x} = \text{Sec. BMQ} \quad \text{(fig. 2.)}$$

$$= \sqrt{[1 + (\text{tang. BMQ})^2]}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right\}} \text{ i. e.}$$

$$ds = \sqrt{(\Delta x^2 + dy^2)}$$

Planum aequabiliter crescens, tale est, ut duabus rectis comprehendatur parallellis.

Si AB = a, AP = x (fig. 5.) est functio pro plano z:

$$z = a \cdot x \quad \text{eritque}$$

$$\text{facultas mutandi} = \frac{dy}{\Delta x} = a.$$

Si planum crescit acceleratione; a semper major majorque, retardatione, minor minorque fieri debet. i. e.

XXII. Si planum, abscissa et aliqua curva comprehensum, crescit acceleratione, curva crescere, retardatione au-

tem, decrescere, si denique aequabilitate crescit, curva neque crescere neque decrescere, i. e. ea linea recta cum abscissa parallella esse debet.

Sequitur insuper:

XXIII. facultatem mutandi plani esse ordinatam curvae eum comprehendentis.

Sit igitur functio curvae:

$$y = \varphi(x)$$

atque ea inter planum, z, et abscissam, x, fictam:

$$z = \psi(x) \quad \text{erit:}$$

$$\frac{dz}{\Delta x} = y \quad \text{atque}$$

$$dz = y \cdot \Delta x$$

Si curva tanquam spiralis consideratur, area nonnisi aequabiliter crescit ita, ut radius vector semper maneat idem, i. e. ut area comprehenditur circulo.

Si AP = a, (fig. 6.) erit:

$$\text{area } APQ = s = \frac{a^2 \varphi}{2} \quad \text{atque}$$

$$\text{facultas mutandi} = \frac{a^2}{2} \quad \text{i. e.}$$

quadratum radii vectoris divisum per 2 facultas est mutandi.

Si igitur aequatio alicujus areae, si curva eam comprehendens tanquam spiralis consideratur et per aequationem

$$z = \psi(\varphi)$$

exprimitur, sic fingitur:

$$s = \chi(\varphi) \text{ (fig. 7.) erit:}$$

$$\frac{ds}{\Delta\varphi} = \frac{z^2}{2} \text{ atque:}$$

$$ds = \frac{z^2 \Delta\varphi}{2}$$

Eodem modo aequatio inter longitudinem curvae et arcum φ deduci potest, ad quod autem efficiendum nonnullae propositiones e theoria, adhuc nunquam exposita, spiralium antecedere debent, atque hic non locus est, tam eas ostendendi, quam omnino multa exempla praebendi.

Newtono calculum differentialem inveniente notionem generalem fluentis ad eam *motus* annexuit. Docet ille: omnem fluentem (motum) in omni statu *celeritatem* (fluxionem) habere, et, si aequatio inter spatium et tempus esset:

$$s = \varphi(t)$$

celeritatem esse:

$$= \dot{s} : \dot{t}$$

Rationem ergo differentialem Newtonis in materiali sensu acceptam, cum nostra eandem esse, elucet. Sunt notiones maximae justae, quamvis ad exemplum, sed ad optimum, annexae.

In accuratiori commentatione de calculo differentiali generalius tractabo, atque tam omnes propositiones ad functiones plurium variabilium applicabo, quam usum illarum notionum in applicatione omni explicabo, et theoriam curvarum tanquam spirales considerandarum adjungam.

THEOREMATIS POLYNOMIALIS

INDETERMINATI EXPONENTIS, SINE PONENDO THEOREMATE BINOMIALI

DEMONSTRATIO UNIVERSALIS.

Geometrae recentiores theorema polynomiale s. infinitinomiale non falso theorema magni momenti totius vocaverunt analyseos.

Propositione enim ex hac generaliter demonstrata statim theorema sequitur binomiale, fecundissimum in calculo sublimiori, nam ex eo et series exponentialis et logarithmica, h. e. totus apparatus ad calculum differentiarum effluit.

Demonstrationes autem universales hujus theorematis partim e calculo differentiarum, h. e. ex ea parte matheseos acceptae sunt, quae tantum in hoc nititur, demonstrationes ergo utique improbandae; partim reductae sunt ad theorema binomiale universaliter jam demonstratum.

Attamen Analysis a particularibus propositionibus ad generaliores transire non debet.

Nostrum autem est, hanc propositionem demonstrare ita, ut nihil supponamus, quod fundatum est in eo.

Si n numerum repraesentat integrum atque positivum, satis notum est, esse:

$$\left\{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \dots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} + \dots\right\}^{n}$$

$$= {}^{0}_{p}\overset{n}{C}x^{n\alpha} + {}^{1}_{p}\overset{n}{C}x^{n\alpha+\delta} + \dots + {}^{r}_{p}\overset{n}{C}x^{n\alpha+r\delta} + \dots$$

ubi elementa in complexionibus tanquam factores, hae autem ipsae ut partes considerandae sunt.

Attamen ex deductione formarum combinatoriarum numeri propositi ex elementis $\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \dots \overset{r}{a} \dots$ cognitum est, ${}^{r}\overset{n}{C}(\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \dots)$ constare formis

$$\overbrace{\overset{0}{a}\dots\overset{0}{a}}^{n-1}\;{}^{r}\overset{1}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}\dots) + \overbrace{\overset{0}{a}\dots\overset{0}{a}}^{n-2}\;{}^{r}\overset{2}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}\dots) + \dots$$

ubi generaliter pars h^{ta} est:

$$\overbrace{\overset{0}{a}\ldots\overset{0}{a}}^{n-h}\ {}^{r}\overset{h}{C}(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a}\ldots)$$

Formae autem combinatoriae, ${}^{r}\overset{n}{C}(\overset{0}{a},\ \overset{1}{a}\ldots)$ in illa propositione praeterea permutandae sunt, omnes ergo partes $\overbrace{\overset{0}{a}\ldots\overset{0}{a}}^{n-1}\ {}^{r}\overset{1}{C}(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a}\ldots)$ etc. permutari debent. Numerum permutationis h^tae^ partis determinabimus.

In aliqua forma combinatoria ex

$$\overbrace{\overset{0}{a}\ldots\overset{0}{a}}^{n-h}\ {}^{r}\overset{h}{C}(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a}\ldots),$$

quae sit $\overbrace{\overset{0}{a}\ldots\overset{0}{a}}^{n-h} M$, ita, ut M una forma combinatoria sit ex ${}^{r}\overset{h}{C}(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a}\ldots)$ et, si N est numerus permutationis illius formae, ut

$$^{M,\,N}S.MN = {}^{r}_{p}\overset{h}{C}(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a}\ldots)$$

sunt n elementorum, inter qua $n-h$ sunt aequalia, et, si in M omnia elementa essent varia, numerus permutationis ips $\overbrace{\overset{0}{a}\ldots\overset{0}{a}}^{n-h} M$, esset $= n(n-1)\ldots[n-(h-1)]$. Quia autem in M insuper nonnulla genera aequalium elementorum inesse possunt, atque productum ex numeris permutationis illius ut divisor ipsi $n(n-1)\ldots[n-(h-1)]$ supponendum est, ut coefficiens ips. $\overset{0}{a}\overbrace{\ldots}^{n-h}\overset{0}{a}\;{}^{r}C(\overset{h}{a},\overset{1}{a},\overset{2}{a}\ldots)$ seu $\overset{0}{a}{}^{n-h\,r}\overset{h}{C}$ inveniatur, hoc productum cognitum esse debet.

Sit id $= x$, et quia numerus permutationis ips. $M = N$ est, erit

$$\frac{h(h-1)\ldots 1}{x} = N. \quad \text{et}$$

$$x = \frac{h(h-1)\ldots 1}{N}$$

coefficiens igitur ips. M erit:

$$= \frac{n(n-1)\ldots[n-(h-1)]}{h(h-1)\ldots 1} N$$

et pars h^{ta} ips. ${}^{r}\overset{n}{C}(\overset{0}{a}, \overset{1}{a}\ldots)$ permutata erit:

$$\frac{n(n-1)\ldots[n-(h-1)]}{h.(h-1)\ldots 1}\overset{0}{a}{}^{n-h}\,N.M$$

ubi brevitatis causa $\dfrac{n(n-1)\ldots[n-(h-1)]}{h(h-1)\ldots 1}$

per ${}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}$ indicabimus.

Si autem pro M et N omnes ponuntur valores, erit pars h^{ta} ips. ${}^{r}_{p}\overset{n}{C}(\overset{0}{a}, \overset{1}{a}\ldots)$,

$$= {}^{M,N}S\;{}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}a^{n-h}.N.M$$

$$= {}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}.a^{n-h\,r}_{\;\;p}\overset{h}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}\ldots)$$

Si autem expressio integra ${}^{r}_{p}\overset{n}{C}(\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \ldots)$ exhibenda est, ultimus pro h substituendus valor cognitus esse debet, qui autem a ratione exponentis classis, n, ad eum summae, r, dependet.

Si n non minus est, quam r, ultima forma ips. ${}^{r}\overset{n}{C}(\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \ldots)$ ex r elementis constat nonnisi primis, elementis 0^{tis} autem tantum adjunctis, quantum n major est, quam r, in quo casu igitur ultima pars ips. ${}^{r}\overset{n}{C}(\overset{0}{a}, \overset{1}{a} \ldots)$ erit:

$$= {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r}\, {}^{r}_{p}\overset{r}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots)$$

Si autem $r > n$, forma ultima erit:

$$= {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}\, a^{0}\, {}^{r}_{p}\overset{n}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots) = {}^{r}_{p}\overset{n}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots)$$

et quia ${}^{n}\overset{n+1}{\mathfrak{B}} = 0$, generaliter partem ultimam illius expressionis per:

$${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r}\, {}^{r}_{p}\overset{r}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots)$$

exprimi posse, perspicuum est.

Si igitur in

$${}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}\, {}^{r}_{p}\overset{h}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots)$$

pro h omnes ab 1 usque ad r substituuntur valores, et partes sic productae summantur, hae aequales erunt ips. ${}^{r}_{p}\overset{n}{C}(\overset{o}{a}, \overset{1}{a}\,..)$

h. e.

$${}^{r}_{p}\overset{n}{C}(\overset{o}{a}, \overset{1}{a}\ldots) = {}_{1\ldots r}\overset{h}{S}[{}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{o}{a}^{n-h}\,{}^{r}_{p}\overset{h}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}\ldots)]$$

atque terminus r^{tus} dignitatis:

$$(\overset{o}{a}x^{\alpha}+\overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}\ldots+\overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta}\ldots)^{n} \text{ erit:}$$

$${}_{1\ldots r}\overset{h}{S}({}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{o}{a}^{n-h}\,{}^{r}_{p}\overset{h}{C})\,x^{n\alpha+r\delta}$$

propositio, pro n, numero integro et positivo satis demonstrata.

Analysis autem non solum determinationem independentem, quamvis graviorem ratione scientiae, sed etiam recurrentem postulat; quae adhuc deducenda est, et de ea ostendemus, esse generalem, i. e. veram pro n, numero quocunque; unde autem reconcludemus, determinationem quoque independentem esse generalem.

Ex formarum combinatoriarum numeri propositi ex elementis, $\overset{o}{a}, \overset{1}{a}\ldots\overset{r}{a}\ldots$ deductione, esse cognitum:

$${}^{r}_{p}\overset{n+1}{C}=\overset{o}{a}\,{}^{r}_{p}\overset{n}{C}+\overset{1}{a}\,{}^{r-1}_{p}\overset{n}{C}+\ldots+\overset{h}{a}\,{}^{r-h}_{p}\overset{n}{C}\ldots+\overset{r}{a}\,{}^{o}_{p}\overset{n}{C}$$

supponimus. Quae jam scala est recursionis, cujus autem est, combinationes classis $n+1$ et summae r ex omnibus combinationibus priorum summarum classis n producere. Scala autem recursionis hic adhibenda ex omnibus combinationibus classis n priorum summarum, $(r-1)$, $(r-2)$ usque ad 0, combinationes omnes summae r ejusdem classis procreare debet.

Scala autem illa recursionis sic transmutabimus, ut ex ea relatio exsistat supra dicta.

Ad quod autem opus est, ${}_{r}\overset{n+1}{C}$ annihilari, et hypothesin faciemus, quemque terminum scalae recursionis proprium accipere factorem, ut hoc effici possit. Qui factor autem, quia proprius est termini, in quo inest, ab eodem dependit numero, qui indicat terminum scalae recursionis, in quo versatur, i. e. factor in h^{to} termino ab h dependit, seu functio est ips. h. Si in hanc functionem ips. h, pro h, substituitur 1, factor primus eo producitur, etc., ex quo intelligi potest, quemque terminum scalae recursionis multiplicari debere termino alicujus seriei. Casu autem simplicissimo accepto, quod nempe functio primi tantum gradus, i. e. quod series illa series arithmetica primi gradus: $b, b+d, b+2b \ldots b+hd \ldots$ sit, erit scala recursionis:

$$b \cdot \overset{0}{a}\,{}^{r}_{p}\overset{n}{C} + (b+d)\,\overset{1}{a}\,{}^{r-1}_{p}\overset{n}{C} \ldots (b+hd)\,\overset{h}{a}\,{}^{r-h}_{p}\overset{n}{C} \ldots$$
$$(b+rd)\,\overset{r}{a}\,{}^{0}_{p}\overset{n}{C}.$$

Attamen nunc cognoscemus, quomodo hoc ipso ${}^{r}_{p}\overset{n+1}{C}$ mutatus est.

Excipimus igitur ex ${}^{r}_{p}\overset{n+1}{C}$ aliqua forma combinatoria, M, cui est numerus permutationis N, sic, ut

$${}^{N,M,}S\,N \cdot M = {}^{r}_{p}\overset{n+1}{C}$$

Ordo h^{tus} ips. NM, recursione ex $\overset{h}{a}\,{}^{r-h}\overset{n}{C}$ exstitit, atque, si in M elementum $\overset{h}{a}$ φ^{ties} inest, sic, ut $S\varphi = n+1$ et ${}^{h,\varphi}Sh \cdot \varphi = r$; numerus permutationis ordinis h^{ti} erit $\dfrac{N \cdot \varphi}{n+1}$ et ille ipse $= \dfrac{N \cdot \varphi}{n+1} M$. Attamen ex recursione insuper factorem $b + hd$ accipit, et si in hac expressione

$$(b+hd)\,\frac{N \cdot \varphi}{n+1}\,M$$

pro φ et h omnes valores, qui M admittit, substituuntur, mutationem ips. MN hoc indicat:

$$\overset{h,\varphi}{S}\left[(b+hd)\frac{N\varphi}{m+1}M\right]$$

$$=\frac{M.N}{m+1}.(b.S\varphi+dSh\varphi)$$

$$=M.N\left\{\frac{(n+1)b+dr}{n+1}\right\}$$

Si autem insuper pro M et N valores substituuntur omnes in eam formam, eo tandem prodiit id, quomodo expressio $\overset{n+1}{\underset{p}{{}^{r}C}}$ sumptione superiori mutata est; h. e.

$$\overset{M,N}{S}\left\{MN\left[\frac{(n+1)b+dr}{n+1}\right]\right.$$

$$=\left\{\frac{b(n+1)+dr}{n+1}\right\}\overset{n+1}{\underset{p}{{}^{r}C}}$$

ex quo sequitur $\overset{n+1}{\underset{p}{{}^{r}C}}$ sumptione illa factorem $\frac{b(m+1)+dr}{m+1}$ accepisse.

Nunc igitur quaestio illa redit, quomodo $\overset{n+1}{\underset{p}{{}^{r}C}}$ annihilari possit, seu, quomodo b et d esse debeat, ut:

$$\frac{(n+1)b+dr}{n+1}=0$$

hoc fit, si $b = -r$ et $d = n + 1$ est.

Nunc igitur est:

$$0 = -r.\overset{0}{a}\,{}^{r}_{p}\overset{n}{C} + (n+1-r)\,\overset{1}{a}\,{}^{r-1}_{p}\overset{n}{C} \dots + (hn+h-r)\,\overset{h}{a}\,{}^{r-h}_{p}\overset{n}{C} \dots rn\overset{r}{a}\,{}^{0}_{p}\overset{n}{C}.$$

atque scala recursionis gaudemus sequenti:

$${}^{r}_{p}\overset{n}{C} = \frac{(n-r+1)\,\overset{1}{a}\,{}^{r-1}_{p}\overset{n}{C} + \dots (hn-r+h)\,\overset{h}{a}\,{}^{r-h}_{p}\overset{n}{C} \dots + rn\overset{r}{a}\,{}^{0}_{p}\overset{n}{C}}{r.a.}$$

et hic eventus priorem probat sumtionem.

Si igitur ponamus:

$$(\overset{0}{a}x^{\alpha} \dots \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \dots)^{n} = \overset{0}{A}x^{n\alpha} + \dots + \overset{r}{A}x^{n\alpha+r\delta}, \dots$$

erit:

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)\,\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \dots (hn-r+h)\,\overset{h}{a}\overset{r-h}{A} \dots + r.n\overset{r}{a}\overset{0}{A}}{r.a}$$

si n numerus est integer atque positivus.

Pars secunda hujus disquisitionis agit demonstrationem, eadem formulam quoque valere, si n numerus est negativus vel fractio.

Facile autem deducendum esse, si progressio exponentium ips. x in serie fundamentali est, α, $\alpha + \delta$ .. $\alpha + r\delta$ .. eam in evolutione, si n numerus quicunque, esse $n\alpha$, $n\alpha + r\delta$ ... $n\alpha + r\delta$ ... statim intelligere potest, et nos tardaret frustra, si hoc demonstrare velimus. Attamen statim ostendemus, non solum formam evolutionis eandem, sed etiam coefficientes eosdem esse, sit n numerus quicunque.

Sit:

$$(\overset{0}{a}x^{\alpha} \ldots \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots)^{\frac{1}{m}}$$

$$= Ax^{\frac{\alpha}{m}} \ldots + \overset{r}{A}x^{\frac{\alpha}{m}+r\delta} \ldots$$

erit:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} \ldots\ldots \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots$$

$$= (Ax^{\frac{\alpha}{m}} \ldots + \overset{r}{A}x^{\frac{\alpha}{m}+r\delta} \ldots)^{m}$$

et:

$$\overset{r}{a} = \frac{(m-r+1)\overset{1}{A}\overset{r-1}{a}\ldots(hm-r+h)\overset{h}{A}\overset{r-h}{a}\ldots rm\overset{r}{A}\overset{o}{a}}{r\,.\,\overset{o}{A}}$$

i. e.

$$-r\overset{o}{a}\overset{r}{A} = \frac{-r\overset{r}{a}\overset{o}{A}+(m-r+1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A}\ldots(hm-r+h)\overset{r-h}{a}\overset{h}{A}\ldots[m(r-1)-r+r-1]\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}}{m}$$

$$= \frac{mr-m-1}{m}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}\ldots\frac{[m(r-h)-r+r-h]}{m}\overset{h}{a}\overset{r-h}{A}\ldots\frac{m-r+1}{m}\overset{r-1}{a}\overset{r}{A}-\frac{r}{m}\overset{r}{a}\overset{o}{A}.$$

$$= -\left(\tfrac{1}{m}-r+1\right)\overset{1}{a}\overset{r}{A}\ldots-\left(h\tfrac{1}{m}-r+h\right)\overset{h}{a}\overset{r-h}{A}\ldots-\left[(r-1)\tfrac{1}{m}-1\right]\overset{r-1}{a}\overset{1}{A}-r\tfrac{1}{m}\overset{r}{a}\overset{o}{A}.$$

$$\overset{r}{A} = \frac{\left(\tfrac{1}{m}-r+1\right)\overset{1}{a}\overset{r}{A}\ldots\left(h\tfrac{1}{m}-r+h\right)\overset{h}{a}\overset{r-h}{A}\ldots r\tfrac{1}{m}\overset{r}{a}\overset{o}{A}}{r\,\overset{o}{a}}$$

Pro exponentibus ergo quoque fractis eadem valet formula tanquam integris, nam si formula recursionis pro $\frac{1}{m}$ valet, eam quoque pro $\frac{n}{m}$ valere vix monere audeo.

Restat autem adhuc, ut ostendamus, n in formula quoque numerum negativum esse posse, i. e. formulam theorematis polynomialis generalem esse.

$$(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \dots \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta})^{-1}$$

$$= \frac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \dots \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \dots}$$

sit $= \overset{0}{A}x^{-\alpha} + \overset{1}{A}x^{-\alpha+\delta} \dots \overset{r}{A}x^{-\alpha+r\delta} \dots$

erit: $\overset{0}{A}\overset{0}{a} = 1$ i. e. $\overset{0}{A} = a^{-1}$.

et generaliter:

$$\overset{0}{a}\overset{r}{A} + \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} \dots \overset{h}{a}\overset{r-h}{A} \,..\, \overset{r}{A}\overset{0}{a} = 0 \quad \text{ergo:}$$

$$\overset{r}{A} = \frac{-\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} - \dots - \overset{h}{a}\overset{r-h}{A} \dots - \overset{r}{a}\overset{o}{A}}{\overset{o}{a}}$$

$$= \frac{-r\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} \dots - r\overset{h}{a}\overset{r-h}{A} \dots - r\overset{r}{a}\overset{o}{A}}{r\,.\,\overset{o}{a}} \quad \text{i. e.}$$

$$\overset{r}{A} = \frac{[(-1) - r + 1]\,\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} \dots + [h(-1) - r + h]\,\overset{h}{a}\overset{r-h}{A} \dots r(-1)\,\overset{r}{a}\overset{o}{A}}{r\,.\,a}$$

Ex quo sequitur, si ponitur:

$$(\overset{o}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \dots)^{-m} = \overset{o}{A}x^{-m\alpha} \dots \overset{r}{A}x^{-m\alpha+r\delta} \dots$$

esse:

$$\overset{r}{A} = \frac{(-n - r + 1)\,\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} \dots + [h(-n) - r + h]\,\overset{h}{a}\overset{r-h}{A} \dots r(-n)\,\overset{r}{a}\overset{o}{A}}{r\,.\,a}$$

atque theorematis polynomialis formula universaliter demonstrata gaudemus.

Positis deinde elementis $\overset{2}{a}, \overset{3}{a} \dots = 0$ et $\overset{0}{a} = \overset{1}{a} = 1$ et $\alpha = 0$, $\delta = 1$ polynomium in $1 + x$ transmutatur. In expressione independente

$$ {}_{1\dots1}^{\;\;h}S\; {}^{n}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}\; {}^{r}_{p}\overset{h}{C} $$

signum ${}^{r}\overset{h}{C}$ nunc ad elementa spectat 1, 1, pro h ergo tantum valor r substitui potest, et coefficiens r^{tus} fit:

$$ {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{n(n-1)(n-2)\,.\,.\,[(n-(r-1)]}{r\dots\dots1} $$

sic, ut:

$$ (1+x)^{n} = {}^{n}\overset{0}{\mathfrak{B}}x^{0} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^{1} \dots {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^{r} \dots $$

sive, si pro x valor $\frac{b}{a}$ ponitur:

$$ (a+b)^{n} = {}^{n}\overset{0}{\mathfrak{B}}a^{n} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}b \dots {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}.b^{r} \dots $$

Fig. 1.

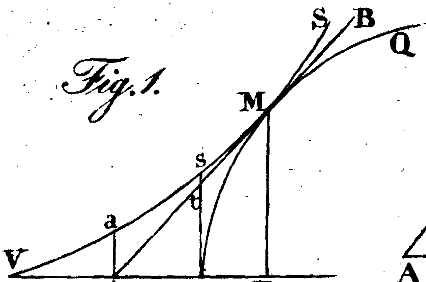


Fig. 4.

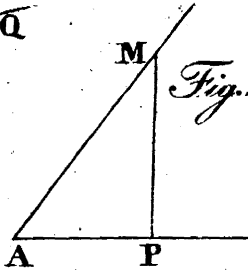


Fig. 2.

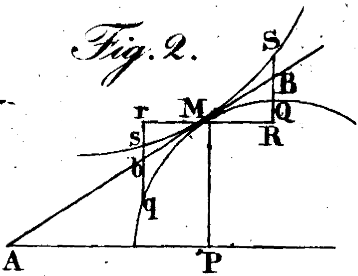


Fig. 5.

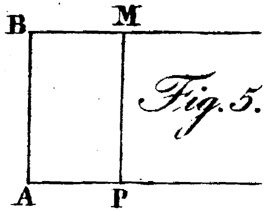


Fig. 3.

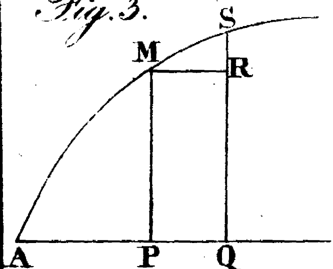


Fig. 6.

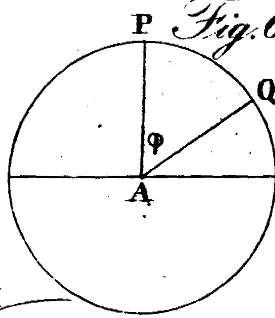
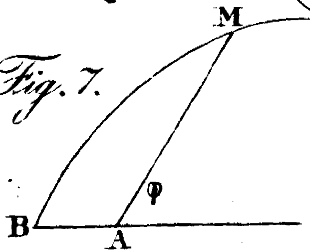


Fig. 7.



Spehr tract. de quantit. fluente